SOLUŢII ŞI BAREMURI ORIENTATIVE

Etapa judeţeană şi a municipiului Bucureşti
5 martie 2005

CLASA A VIII-a

Subiectul 1. a) Fie $a = \overline{0,(a_1a_2\ldots a_{10})}$ un element al mulţimii M, unde $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ reprezintă o permutare a cifrelor $0, 1, 2, \ldots, 9$. Deoarece $b_1 = 9 - a_1, b_2 = 9 - a_2, \ldots b_{10} = 9 - a_{10}$ sunt cifre distincte 1pct
rezultă că $b = \overline{0,(b_1b_2\ldots b_{10})}$ aparţine mulţimii M. 1pct

Observăm că $\frac{1}{2} \notin M$ şi fiecărui element $a \in M, a < \frac{1}{2}$ îi corespunde un element $b = 1 - a \in M, b > \frac{1}{2}$ şi reciproc. 1pct

Grupând astfel elementele lui M în perechi (a, b) cu $a < \frac{1}{2} < b$ şi $a+b = 1$, deducem că media aritmetică a elementelor mulţimii M este $\frac{1}{2}$. 1pct

b) Să observăm că suma cifrelor din perioada unui număr a din M este $0 + 1 + 2 + \ldots + 10 = 45$, deci fracţia $\dfrac{\overline{a_1a_2\ldots a_{10}}}{\underbrace{99\ldots9}_{10\text{ cifre}}}$ se simplifică prin 9 şi avem

$a = \dfrac{m}{\underbrace{11\ldots1}_{10\text{ cifre}}}$, unde $m \in \mathbb{N}$. 1pct

Considerăm $n = \underbrace{11\ldots1}_{9\text{ cifre}}2$. Cum $1 < n < 10^{10}$ şi $(n-1)\cdot a = m \in \mathbb{N}^*$, rezultă concluzia. 2pct

Subiectul 2. Se completează configuraţia din enunţ la cubul $ABEFDCE'F'$.

a) Planul (DOC) intersectează dreapta AF în punctul M. Deoarece $DC \parallel (ABEF)$ rezultă $OM \parallel DC$, adică M este mijlocul segmentului AF. În consecinţă, dreapta DM este intersecţia planelor (DOC) şi (DAF). 2pct
Distanţa cerută este înălţimea din B în triunghiul isoscel BDM cu $MB = MD = 2\sqrt{5}$ şi $BD = 4\sqrt{2}$. Aria triunghiului BDM este $4\sqrt{6}$, deci înălţimea din B este $\dfrac{4\sqrt{30}}{5}$. 2pct

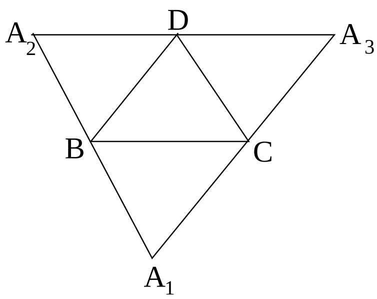
b) Dreptele BF şi AC sunt incluse în planele paralele $(E'BF)$, respectiv (ACF'). Distanţa dintre drepte este distanţa dintre cele două plane. 1pct
Cum DE este perpendiculară pe planele $(E'BF)$ şi (ACF'), 1pct

iar planele împart diagonala DE în trei părţi congruente, rezultă că distanţa căutată este $\frac{1}{3} \cdot DE = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. 1pct

Subiectul 3. Deoarece unghiurile ce subîntind coarede egale în cercuri egale sunt congruente, obţinem 2pct

$$\angle ABC \equiv \angle CDA, \angle ABD \equiv \angle DCA, \angle ACB \equiv \angle ADB,$$

$$\angle CBD \equiv \angle CAD, \angle BCD \equiv \angle BAD, \angle BAC \equiv \angle BCD.$$



Atunci $\angle ABC + \angle CBD + \angle DBA = \angle CDA + \angle CAD + \angle DCA = 180°$, 1pct
deci în desfăşurarea tetraedrului - vezi figura - segmentele BA_1 şi BA_2 sunt în prelungire şi analog DA_3, DA_2, respectiv CA_1, CA_3. 3pct

Se observă că BCD este triunghiul median al lui $A_1A_2A_3$, de unde rezultă concluzia. 1pct

Subiectul 4. În cele ce urmează vom nota vârfurile cu cifra asociată acestora.

Colorăm vârfurile cu 2 culori - alb şi negru - astfel ca orice muchie a cubului să aibă capetele colorate diferit, adică vârfurile de aceeaşi culoare sunt vârfurile unui tetraedru regulat.

Să observăm că o linie frântă conţine 2 vârfuri albe şi două negre. 1pct

Mai mult, dacă alegem 3 vârfuri ce nu au toate aceeaşi culoare, există o linie frântă ce le conţine. 1pct

Dacă 6,7,8 nu au aceeaşi culoare, cum $6+7+8=21$, conform observaţiei anterioare problema este încheiată. 1pct

De asemenea 5,7,8 au suma 20 şi se completează la o linie frântă cu suma cel puţin 21 dacă nu au aceeaşi culoare. 1pct

Rămâne cazul când 5,6,7,8 sunt vârfurile unui tetraedru regulat. Cum 4 are culoare opusă lui 7 şi 8, există *două* linii frânte ce conţin vârfurile 4,7,8. ....2pct

Cum al patrulea vârf nu poate fi în ambele cazuri 1, avem $2+4+7+8 = 21$.

.... 1pct